Optimasi Model *Inventory* Deterministik untuk Permintaan Menaik dan Biaya Pemesanan Konstan

Diana Purwitasari, Rully Soelaiman, Fitri Qonita
Fakultas Teknologi Informasi, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya
E-mail : rully@its-sby.edu

Abstrak

Makalah ini memberikan alternatif baru untuk menyelesaikan permasalahan inventory dengan model deterministik. Permasalahan terjadi untuk kondisi permintaan menaik dan biaya pemesanan konstan dengan solusi optimal didapat menggunakan pendekatan linier. Pencarian solusi optimal dilakukan dalam beberapa tahap sehingga menghasilkan total biaya persediaan yang minimum. Uji coba menunjukkan bahwa optimasi inventory model deterministik mampu memberikan solusi optimal. Total biaya lebih minimal 6.8% pada permasalahan permintaan menaik biaya pemesanan konstan dibanding dengan penyelesaian tanpa optimasi.

Kata Kunci: *inventory model deterministik, permintaan menaik, biaya pemesanan konstan*

1. Pendahuluan

Salah satu metode yang digunakan untuk menyelesaikan permasalahan *inventory* adalah *Economic Order Quantity*. Akan tetapi metode tersebut tidak dapat menyelesaikan permasalahan permintaan yang menaik dan biaya pemesanan yang konstan. Oleh karena itu permasalahan ini akan diselesaikan dengan melakukan optimasi pada *inventory* model determinisitik [1][2][3]. Keadaan permasalahan digambarkan dalam empat model yang merupakan kombinasi fase pengadaan dan fase *shortages*. Berikut adalah empat model (lihat Gambar 1) tersebut: (1) keadaan yang dimulai dengan fase pengadaan dan diakhiri tanpa terjadi *shortages*, (2) keadaan yang dimulai dengan fase pengadaan dan diakhiri dengan fase *shortages*, (3) keadaan yang dimulai dengan fase *shortages* dan diakhiri tanpa terjadi *shortages*, dan (4) keadaan yang dimulai dengan fase *shortages* dan diakhiri dengan fase *shortages*.

Dalam memodelkan masalah digunakan asumsi permasalahan, yaitu: (i) waktu tunggu sama dengan nol, (ii) *shortages* diperbolehkan terjadi, (iii) pengadaan dilakukan seketika saat ada permintaan dan frekuensi dilakukannya adalah tak berhingga, (iv) persediaan awal sama dengan nol. Tujuan dari permasalahan model *inventory* adalah bagaimana menentukan jumlah pengadaan *m*, waktu terjadinya pengadaan t_i, dan waktu terjadinya *shortages* s_i agar biaya total menjadi minimum. Definisi biaya total adalah biaya persediaan yang dipengaruhi biaya pemesanan *o*, biaya penyimpanan *h*, dan biaya *shortages s*. Ketiga biaya tersebut bergantung pada fungsi permintaan $f(t)$. Sehingga pada akhirnya fungsi permintaan akan dinyatakan sebagai $f(t) = a + bt$ [4].

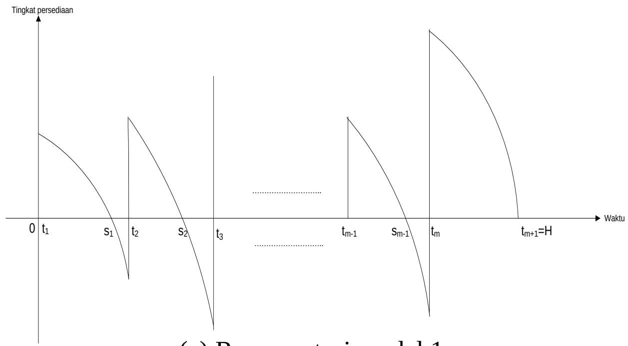
Uji coba dan analisa dilakukan untuk membuktikan bahwa model *inventory lot size* deterministik dapat menyelesaikan permasalahan. Pada analisa terlihat nilai biaya total yang minimum dikatakan optimal setelah dibandingkan dengan jumlah pengadaan. Selain itu perubahan pada waktu pengadaan dan *waktu terjadinya* shortages juga akan mempengaruhi solusi optimal sehingga biaya total yang didapatkan bisa tidak lagi minimum.

2. Model *Inventory* Deterministik

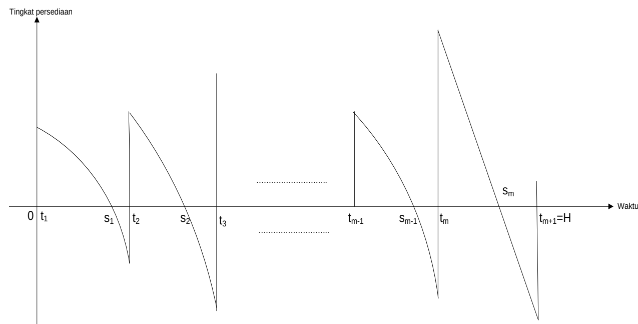
Dalam menyelesaikan permasalahan model *inventory* akan membutuhkan model biaya berdasarkan kombinasi pengadaan dan *shortages* yang telah disebutkan pada bagian pendahuluan. Total biaya persediaan *C* pada representasi keempat model akan dipengaruhi oleh:

- biaya pemesanan *o*, jumlah pengadaan *m* dikalikan dengan biaya pemesanan *o* terjadi setiap kali dilakukan pemesanan untuk pengadaan.
- biaya penyimpanan *h*, biaya yang muncul setiap terjadinya persediaan gudang. Persediaan ada pada saat setelah dilakukan pengadaan dan habis pada saat persediaan mencapai nol yaitu *shortages*.
- dan biaya *shortages s* yang terjadi saat persediaan mencapai nol sehingga permintaan tidak dapat dipenuhi. Biaya *shortages s* dinyatakan sebagai fungsi permintaan yang dikalikan dengan waktu terjadinya *shortages*.

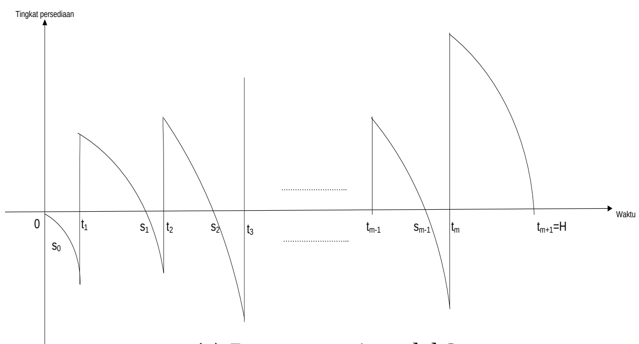
Biaya total direpresentasikan pada persamaan (1) untuk model 1 dan model 2 dengan $C_A(m, t_i, s_i)$. Sedangkan persamaan (2) untuk model 3 dan model 4 dengan $C_B(m, t_i, s_i)$. Pada persamaan, nilai $u = t$, sehingga $f(t) = a + bt$ akan menjadi $f(u) = a + bu$.



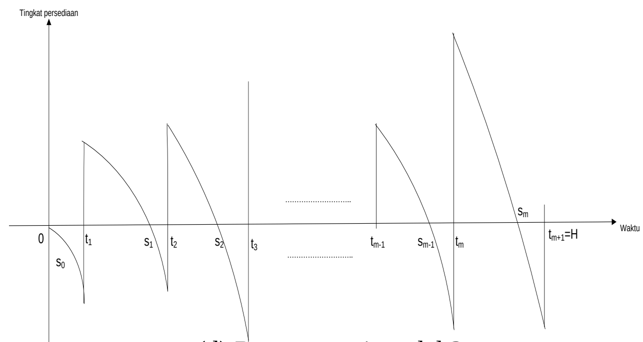
(a) Representasi model 1



(b) Representasi model 2



(c) Representasi model 3



(d) Representasi model 3

Gambar 1. Grafik representasi untuk permasalahan model *inventory*.

$$C_A(m,t_i,s_i) = mo + \sum_{i=1}^{i=m}\left\{ h\int_{t_i}^{s_i}(u-t_i)\,f(u)du + s\int_{s_i}^{t_{i+1}}(t_{i+1}-u)\,f(u)du \right\} \tag{1}$$

Untuk model 1 nilai $t_1 = 0$ dan $t_{m+1} = s_m = H$. Catatan, variabel H menunjukkan batas waktu periode dengan $0 \leq t \leq H$. Sedangkan untuk model 2 nilai $t_1 = 0$, $t_{m+1} = H$ dan $t_m < s_m < H$.

$$C_B(m,t_i,s_i) = mo + \sum_{i=1}^{i=m}\left\{ h\int_{t_i}^{s_i}(u-t_i)\,f(u)du + s\int_{s_i}^{t_{i+1}}(t_{i+1}-u)\,f(u)du \right\} + s\int_{0}^{t_1}(t_1-u)\,f(u)du \tag{2}$$

Pada model 3, nilai $s_0 = 0$, $t_1 > 0$, dan $t_{m+1} = s_m = H$. Sedangkan pada model 4, $s_0=0$, $t_1>0$, $t_{m+1}=H$ dan $t_m< s_m<H$. Notasi yang digunakan untuk t_i menyatakan waktu dilakukannya pengadaan dengan $i = 1, 2, ..., m$. Untuk notasi s_i adalah saat persediaan pada siklus $[t_i,\ t_{i+1})$ mencapai nol. Nilai t_i dan s_i akan menjadi variabel keputusan.

3. Optimasi Model *Inventory* Deterministik

Penyelesaian permasalahan permintaan yang menaik dan biaya pemesanan yang konstan dipengaruhi variabel keputusan m, t_i, dan s_i. Oleh karena itu ketiga variabel tersebut harus dihitung terlebih dahulu. Penentuan nilai optimal t_i dan s_i dilakukan dengan melakukan turunan parsial melalui dua tahap.

(**tahap 1**) untuk setiap nilai m akan ditentukan nilai optimal t_i dan s_i secara rekursif.
(**tahap 2**) kemudian akan dicari nilai m^* optimal yang akan meminimalkan nilai $C(m, t_i, s_i)$.

Representasi akhir persamaan total biaya dinyatakan di persamaan (3), (4), (5) dan (6) untuk permasalahan *inventory* model 1, model 2, model 3 dan model 4.

$$C_1 = mo + \frac{h}{\left[6(1+v)^2\right]}\sum_{i=1}^{i=m-1}\left\{\begin{bmatrix} 3a(1+v)+b(2+v)t_{i+1} \\ +b(1+2v)t_i \end{bmatrix}(t_{i+1}-t_i)^2\right\} + \frac{h}{6}\left[3a+2bH+bt_m\right](H-t_m)^2 \tag{3}$$

$$C_2 = mo + \frac{h}{\left[6(1+v)^2\right]}\sum_{i=1}^{i=m-1}\left\{\begin{bmatrix} 3a(1+v)+b(2+v)t_{i+1} \\ +b(1+2v)t_i \end{bmatrix}(t_{i+1}-t_i)^2\right\} \tag{4}$$

$$C_3 = mo + \frac{h}{[6(1+v)^2]} \sum_{i=1}^{i=m-1} \left\{ \begin{bmatrix} 3a(1+v) + b(2+v)t_{i+1} \\ + b(1+2v)t_i \end{bmatrix} (t_{i+1} - t_i)^2 \right\}$$
$$+ \frac{h}{6}[3a + 2bH + bt_m](H - t_m)^2 + \frac{s}{6}[3a + bt_1]t_1^2 \quad (5)$$

$$C_4 = mo + \frac{h}{[6(1+v)^2]} \sum_{i=1}^{i=m-1} \left\{ \begin{bmatrix} 3a(1+v) + b(2+v)t_{i+1} \\ + b(1+2v)t_i \end{bmatrix} (t_{i+1} - t_i)^2 \right\}$$
$$+ \frac{s}{6}[3a + bt_1]t_1^2 \quad (6)$$

Persamaan (3) dan (4) hasil subsitusi dari persamaan (1). Sedangkan untuk persamaan (5) dan (6) merupakan hasil subsitusi dari persamaan (2). Pada proses pembentukan turunan parsial, notasi $v = h/s$. Nilai m akan dibulatkan ke nilai *integer* terdekat.

$$m = \sqrt{\left\{ \frac{\left[hs\left(a + \frac{bH}{2} \right) H^2 \right]}{2o(h+s)} \right\}} \quad (7)$$

Untuk menghitung nilai m^* optimal dibutuhkan inisialisasi nilai awal m pada persamaan (7). Algoritma untuk mendapatkan nilai m^* optimal adalah sebagai berikut:

(**Langkah 0**) Menentukan dua nilai percobaan dari m^* yaitu nilai m yang dihasilkan dari persamaan (7) dan nilai $m-1$. Kemudian menghitung nilai C_j untuk nilai m dan nilai $m-1$ dengan index-j menunjukkan model *inventory* yang dipilih.

(**Langkah 1**) Jika $C_j(m) \geq C_j(m-1)$ maka akan dihitung $C_j(m-2)$, $C_j(m-3)$, ... sampai terpenuhi kondisi $C_j(l) \geq C_j(l-1)$ dengan nilai $m^* = l$ dan berhentilah pada langkah ini.

(**Langkah 2**) Jika $C_j(m) \leq C_j(m+1)$ maka akan dihitung $C_j(m+2)$, $C_j(m+3)$, ... sampai terpenuhi kondisi $C_j(l+1) \geq C_j(l)$ dengan nilai $m^* = l$ dan berhentilah pada langkah ini.

4. Uji Coba

Uji coba menggunakan empat data permasalahan *inventory* untuk mendapatkan nilai biaya C optimal. Uji coba ini dilakukan pada 2 tahap. Pertama, pengujian pada permasalahan *inventory* dengan satu data untuk setiap model. Kedua, uji coba untuk menentukan nilai m^* optimal global.

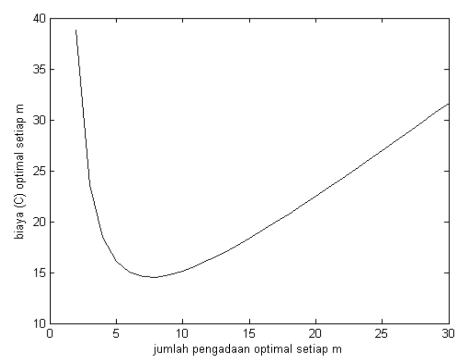
Untuk kesemua model dari model 1 sampai model 4 yang telah disebutkan pada bagian pendahuluan, fungsi biaya dinyatakan sebagai $f(t) = 20 + 90t$ dengan nilai a= 20, b = 90, H = 1, h = 7, s =2, dan o = 1.

Tabel 1. Solusi optimal s_i^* dan t_i^* untuk uji coba data pada model 1.

i	t_i^*	s_i^*
1	0.0000	0.0463
2	0.2083	0.2444
3	0.3706	0.4020
4	0.5119	0.5404
5	0.6401	0.6666
6	0.7591	0.7840
7	0.8711	0.8947
8	0.9774	1.0000
	1.0000	

Tabel 2. Nilai m dan C optimal pada pengujian model 1.

m	C	m	C	m	C
		11	15.6607	21	23.3722
2	38.8243	12	16.2505	22	24.2612
3	23.6705	13	16.9067	23	25.1602
4	18.4272	14	17.6144	24	26.0677
5	16.0933	15	18.3628	25	26.9829
6	15.0151	16	19.144	26	27.9047
7	14.5944	17	19.9519	27	28.8325
8	**14.5612**	18	20.7819	28	29.7656
9	14.7758	19	21.6305	29	30.7034
10	15.1586	20	22.4947	30	31.6454



Gambar 2. Grafik nilai m dan C optimal untuk model 1.

Uji Coba Model 1.

Hasil solusi optimal m^* = 8 dengan C = 14.5612. Solusi optimal s_i^* dan t_i^* ditunjukkan pada Ta-bel 1. Kondisi optimal didapatkan apabila jumlah peng-adaan dilakukan sebanyak m = 8 kali. Jika pengadaan di-coba untuk dilakukan lebih atau kurang dari nilai terse-but maka total biaya C menjadi tidak minimum. Untuk m = 7 nilai C = 14.5944 dan m = 9 maka nilai C = 14.7758 (lihat Tabel 2 dan Gambar 2 untuk pemodelan grafik-nya).

Tabel 3. Perubahan nilai s_i^* dan t_i^* untuk uji coba data pada model 1.

i	t_i^*	s_i^*
1	0.0000	0.0463
2	***0.3504***	***0.3444***
3	0.3706	***0.5020***
4	***0.6267***	0.5404
5	0.6401	0.6666
6	0.7591	0.7840
7	0.8711	0.8947
8	0.9774	1.0000
	1.0000	

Tabel 4. Solusi optimal s_i^* dan t_i^* untuk uji coba data pada model 2.

i	t_i^*	s_i^*
1	0.0000	0.0475
2	0.2139	0.2508
3	0.3800	0.4121
4	0.5245	0.5536
5	0.6555	0.6825
6	0.7770	0.8025
7	0.8914	0.9155
	1.0000	

Tabel 5. Nilai m dan C optimal pada pengujian model 2.

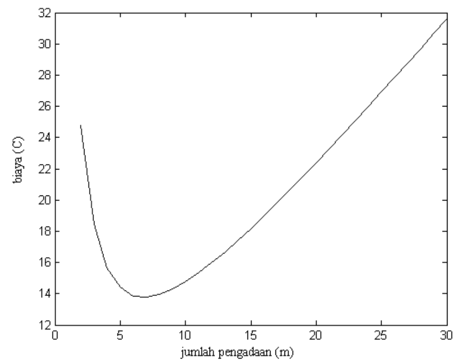
m	C	m	C	m	C
		11	15.3346	21	23.3722
2	24.7919	12	15.9777	22	24.2612
3	18.4341	13	16.6751	23	25.1602
4	15.6809	14	17.4153	24	26.0677
5	14.4001	15	18.1899	25	26.9829
6	13.8662	16	18.9923	26	27.9047
7	**13.7633**	17	19.8178	27	28.8325
8	13.9320	18	20.6626	28	29.7656
9	14.2829	19	21.5235	29	30.7034
10	14.7620	20	22.3983	30	31.6029

Perubahan nilai s_i^* dan t_i^* diluar nilai pada Tabel 1 juga menyebabkan kondisi tidak optimal seperti perubahan pada nilai selain jumlah pengadaan m = 8. Nilai yang berbeda pada Tabel 3 akan menghasilkan total biaya C = 17.2639 lebih besar.

Uji Coba Model 2.

Model 1 dan model 2 adalah keadaan yang dimulai dengan fase pengadaan, sedangkan sisanya yaitu model 3 dan model 4 dimulai dari fase *shortages*.

Hasil solusi optimal m^* = 7 dengan C = 13.7633.



Gambar 3. Grafik nilai m dan C optimal untuk model 2.

Tabel 6. Perubahan nilai s_i^* dan t_i^* untuk uji coba data pada model 2.

i	t_i^*	s_i^*
1	0.0000	0.0475
2	0.2139	0.2508
3	0.3800	***0.3921***
4	***0.4245***	0.5536
5	0.6555	0.6825
6	***0.8770***	0.8025
7	0.8914	0.9155
	1.0000	

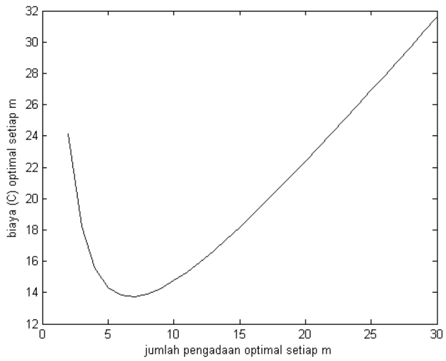
Tabel 7. Solusi optimal s_i^* dan t_i^* untuk uji coba data pada model 3.

i	t_i^*	s_i^*
1	0.1794	0.2173
2	0.3504	0.3831
3	0.4974	0.5268
4	0.6300	0.6572
5	0.7526	0.7781
6	0.8677	0.8919
7	0.9768	1.0000
	1.0000	

Solusi optimal s_i^* dan t_i^* ditunjukkan pada Tabel 4. Jumlah pengadaan kurang atau lebih dari nilai tersebut menyebabkan nilai total biaya C menjadi tidak minimum (lihat Tabel 5 dan Gambar 3 untuk representasi grafik-nya). Perubahan nilai s_i^* dan t_i^* diluar nilai pada Tabel 4 (lihat Tabel 6) menyebabkan kondisi tidak optimal yaitu total biaya C = 16.1132.

Uji Coba Model 3.

Hasil solusi optimal m^* = 7 dengan C = 13.7383. Solusi optimal s_i^* dan t_i^* ditunjukkan pada Tabel 7. Nilai m<7 menyebabkan nilai C menjadi tidak minimum.



Gambar 4. Grafik nilai m dan C optimal untuk model 3.

Tabel 8. Nilai m dan C optimal pada pengujian model 3.

m	***C***	***m***	***C***	***m***	***C***
		11	15.3277	21	23.2838
2	24.1633	12	15.9723	22	24.1808
3	18.1990	13	16.6708	23	25.0867
4	15.5681	14	17.4119	24	26.0004
5	14.3376	15	18.1870	25	26.9209
6	13.8279	16	18.9900	26	27.8475
7	**13.7383**	17	19.8159	27	28.7795
8	13.9148	18	20.6609	28	29.7163
9	14.2706	19	21.5221	29	30.6575
10	14.7528	20	22.3971	30	31.6025

Tabel 9. Perubahan nilai s_i^* dan t_i^* untuk uji coba data pada model 3.

i	t_i^*	s_i^*
1	***0.1800***	0.2173
2	0.3504	***0.4831***
3	***0.5174***	0.5268
4	0.6300	0.6572
5	0.7526	0.7781
6	0.8677	0.8919
7	0.9768	1.0000
	1.0000	

Nilai m>7 juga membuat biaya total C tidak minimum, Tabel 8 menunjukkan perubahan nilai total biaya yang terjadi dengan Gambar 4 sebagai representasi grafiknya. Perubahan nilai yang ditunjukkan di Tabel 9 menyebabkan kondisi tidak optimal yaitu total biaya C = 16.1132.

Uji Coba Model 4.

Hasil solusi optimal m^* = 6 dengan C = 12.9509. Solusi optimal s_i^* dan t_i^* ditunjukkan pada Tabel 10. Variasi nilai m untuk pengadaan pada Tabel 11 selain jumlah pengadaan m = 6 adalah nilai C yang tidak optimal.

Tabel 10. Solusi optimal s_i^* dan t_i^* untuk uji coba data pada model 4.

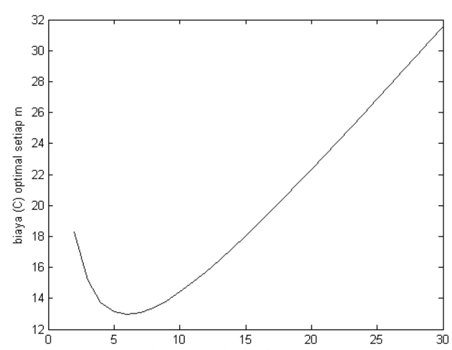
i	t_i^*	s_i^*
1	0.1847	0.2236
2	0.3598	0.3932
3	0.5101	0.5402
4	0.6456	0.6735
5	0.7709	0.7970
6	0.8885	0.9133
	1.0000	

Tabel 11. Nilai m dan C optimal pada pengujian model 4.

m	***C***	***m***	***C***	***m***	***C***
		11	15.3346	21	23.3722
2	18.3064	12	15.9777	22	24.2612
3	15.2028	13	16.6751	23	25.1602
4	13.7486	14	17.4153	24	26.0677
5	13.1156	15	18.1899	25	26.9829
6	**12.9509**	16	18.9923	26	27.9047
7	13.0782	17	19.8178	27	28.8325
8	13.4001	18	20.6626	28	29.7656
9	13.8580	19	21.5235	29	30.7034
10	14.4148	20	22.3983	30	31.6029

Tabel 12. Perubahan nilai s_i^* dan t_i^* untuk uji coba data pada model 4.

i	t_i^*	s_i^*
1	0.1847	0.2236
2	0.3598	0.3932
3	***0.4101***	0.5402
4	0.6456	***0.6835***
5	0.7709	0.7970
6	0.8885	0.9133
	1.0000	



Gambar 5. Grafik nilai m dan C optimal untuk model 4.

Grafik sebagai representasi nilai optimal yang lokal dan global ditunjukkan dengan Gambar 5. Terakhir adalah tentang perubahan nilai s_i^* dan t_i^* diluar nilai pada Tabel 10 (lihat Tabel 12) menyebabkan kondisi tidak optimal yaitu total biaya C = 13.8555.

5. Simpulan

Model *inventory lot size* deterministik dapat menyelesaikan permasalahan permintaan yang menaik dan biaya pemesanan yang konstan. Hal itu terlihat pada uji coba dengan hasil yang didapatkan yaitu nilai biaya total C yang minimum terhadap nilai jumlah pengadaan m tertentu. Nilai C dikatakan optimal setelah dibandingkan dengan nilai m yang lebih kecil dan lebih besar. Perubahan pada nilai s_i dan t_i juga akan mempengaruhi solusi optimal sehingga biaya C yang didapatkan tidak lagi minimum walaupun dengan nilai m yang tetap. Berdasarkan hasil uji coba didapatkan bahwa total biaya C yang dihasilkan dari hasil optimasi adalah rata–rata lebih minimum 6.8% dibandingkan tanpa optimasi.

Daftar Pustaka

[1] Jinn-Tsair Teng, Maw-Sheng Chern, "Deterministic Inventory Lot-size Models wth Shortages for Fluctuating Demand and Unit Purchase Cost", *Intl. Trans in Operation Research*, Vol. 12, hal. 83-100, 2005.

[2] Jinn-Tsair Teng, Maw-Sheng Chern, Hui-Ling Yang, "An Optimal Recursive Method for Various Inventory Replenishments Models with Increasing Demand and Shortages", *Nav. Res. Logistics*, Vol. 44, hal. 791-806, 1997.

[3] S.K Goyal, B.C Giri, "Note on an Optimal Recursive Method for Various Inventory Replenishments Models with Increasing Demand and Shortages", *Nav. Res. Logistics*, Vol. 47, 2000.

[4] Hamdy A Taha, *Operations Research: An Introduction Seventh Edition*, Prentice Hall, University of Arkansas, Fayetteville.